

תוכן העניינים:

2	מתמטיקה לכיתה ח
2	חפיפת משולשים
2	מבוא לחפיפת משולשים :
2	סיכום כללי :
3	שאלות :
4	תשובות סופיות :
5	משפט חפיפה ראשון :
5	סיכום כללי :
5	שאלות :
7	תשובות סופיות :
8	משפט חפיפה שני :
8	סיכום כללי :
8	שאלות :
10	תשובות סופיות :
11	משפט חפיפה שלישי :
11	סיכום כללי :
11	שאלות :
13	תשובות סופיות :
14	חפיפת משולשים עם חיבור וחסור קטעים :
14	שאלות :
14	תשובות סופיות :
15	חפיפת משולשים עם חיבור וחסור זוויות :
15	שאלות :
15	תשובות סופיות :
16	חפיפת משולשים עם כיסוי חלקי :
16	שאלות :
16	תשובות סופיות :
17	שתי חפיפות :
17	שאלות :
17	תשובות סופיות :
18	חפיפת משולשים עם ישרים מקבילים :
18	שאלות :
18	תשובות סופיות :

מתמטיקה לכיתה ח

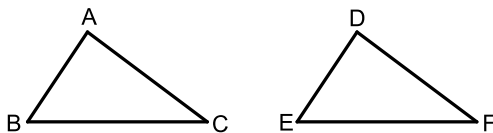
חפיפת משולשים

מבוא לחפיפת משולשים:

סיכום כללי:

הגדרה:

שני משולשים שאם נניח אותם אחד על השני הצורות תתלכדנה נקראים **משולשים חופפים**.
במשולשים חופפים מתקיימים 3 שוויונות של הצלעות בהתאמה ו-3 שוויונות של הזוויות בהתאמה.



דוגמה:

נתונים המשולשים $\triangle ABC$ ו- $\triangle DEF$.

סימון: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

מתקיים: $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$

וכן: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$, $\sphericalangle C = \sphericalangle F$.

משפטי חפיפה:

כדי להראות כי זוג משולשים הם חופפים, לא יהיה צורך להראות את כל 6 השוויונות, אלא נוכל לנסח 'תנאים מקלים' שיספיקו כדי לטעון את החפיפה.
לתנאים אלו קוראים **משפטי חפיפה** - נלמד 3 משפטי חפיפה:

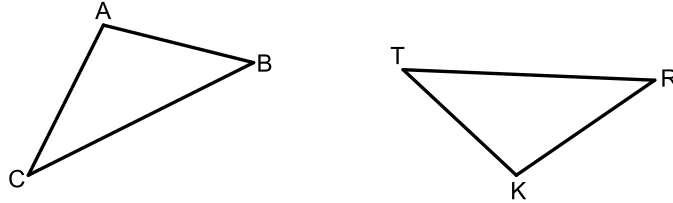
- משפט חפיפה ראשון: צלע. זווית. צלע.
- משפט חפיפה שני: זווית. צלע. זווית.
- משפט חפיפה שלישי: צלע. צלע. צלע.

הערה:

ישנו משפט חפיפה נוסף, משפט חפיפה רביעי, שאותו תפגשו בהמשך הלימודים.

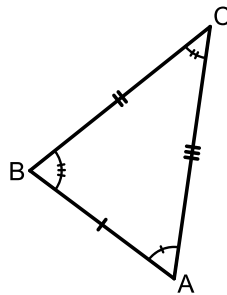
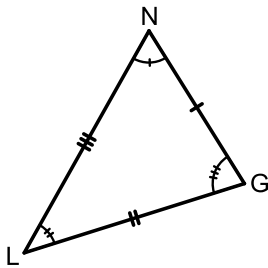
שאלות:

- 1) לפניכם שני משולשים חופפים. העתיקו את אחד המשולשים על נייר שקוף כדי למצוא את התאמת החפיפה.

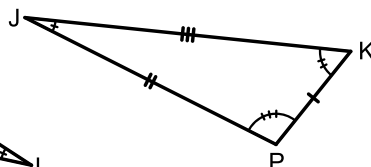
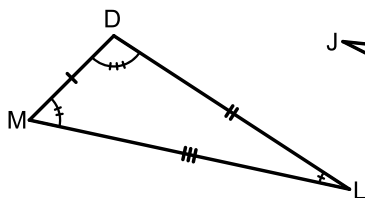


- א. השלימו את התאמת הקודקודים:
 A מתאים ל- _____ B מתאים ל- _____ C מתאים ל- _____
- ב. השלימו:
 $CA = \underline{\hspace{2cm}}$ $BC = \underline{\hspace{2cm}}$ $AB = \underline{\hspace{2cm}}$
- ג. השלימו:
 $\sphericalangle A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sphericalangle B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sphericalangle C = \underline{\hspace{2cm}}$

- 2) במשולשים הבאים שבכל סעיף, מסמנים את הצלעות השוות באורכן ואת הזוויות השוות בגודלן באותו הסימון. השלימו את סדר החפיפה לפי התאמת קודקודים.

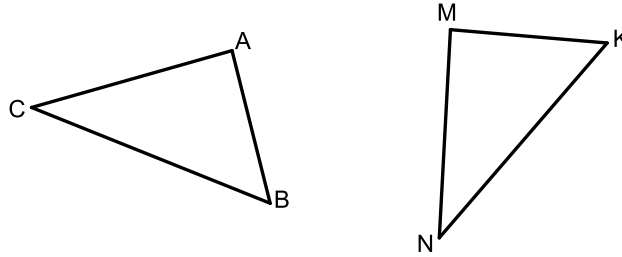


א. $\triangle ABC \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$



ב. $\triangle DML \cong \triangle \underline{\hspace{2cm}}$

3 נתון: $\triangle ABC \cong \triangle MKN$.



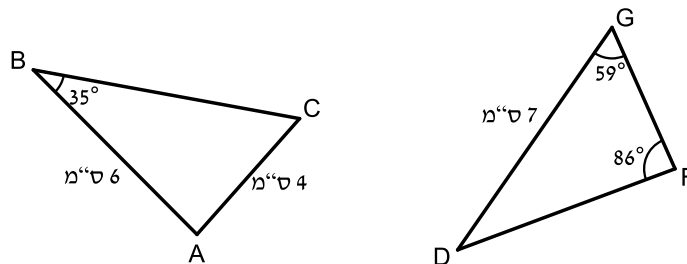
השלימו:

$BC = \underline{\hspace{2cm}}$ $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ $AC = \underline{\hspace{2cm}}$

$\sphericalangle A = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sphericalangle B = \underline{\hspace{2cm}}$ $\sphericalangle C = \underline{\hspace{2cm}}$

4 נתון: $\triangle ABC \cong \triangle FDG$.

רשמו את אורכי הצלעות ואת הגדלים של זוויות המשולש ABC.



תשובות סופיות:

- 1 א. A מתאים ל- K, B מתאים ל- T, C מתאים ל- R.
 ב. $CA = KR$, $BC = RT$, $AB = KT$.
 ג. $\sphericalangle A = \sphericalangle K$, $\sphericalangle B = \sphericalangle T$, $\sphericalangle C = \sphericalangle R$.

- 2 א. $\triangle ABC \cong \triangle NGL$ ב. $\triangle DML \cong \triangle PKJ$.

- 3 $\sphericalangle A = \sphericalangle M$, $\sphericalangle B = \sphericalangle K$, $\sphericalangle C = \sphericalangle N$, $BC = KN$, $AB = MK$, $AC = MN$

- 4 $AC = FG = 4$ ס"מ, $BC = DG = 7$ ס"מ, $AB = FD = 6$ ס"מ
 $\sphericalangle A = \sphericalangle F = 86^\circ$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 35^\circ$, $\sphericalangle C = \sphericalangle G = 59^\circ$

משפט חפיפה ראשון:

סיכום כללי:

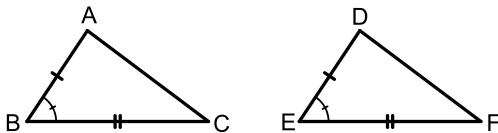
משפט חפיפה ראשון (צלע, זווית, צלע):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שתי צלעות והזווית הכלואה ביניהן אז המשולשים חופפים.

מתמטית:

אם: $\angle B = \angle E$ ו- $AB = DE$, $BC = EF$

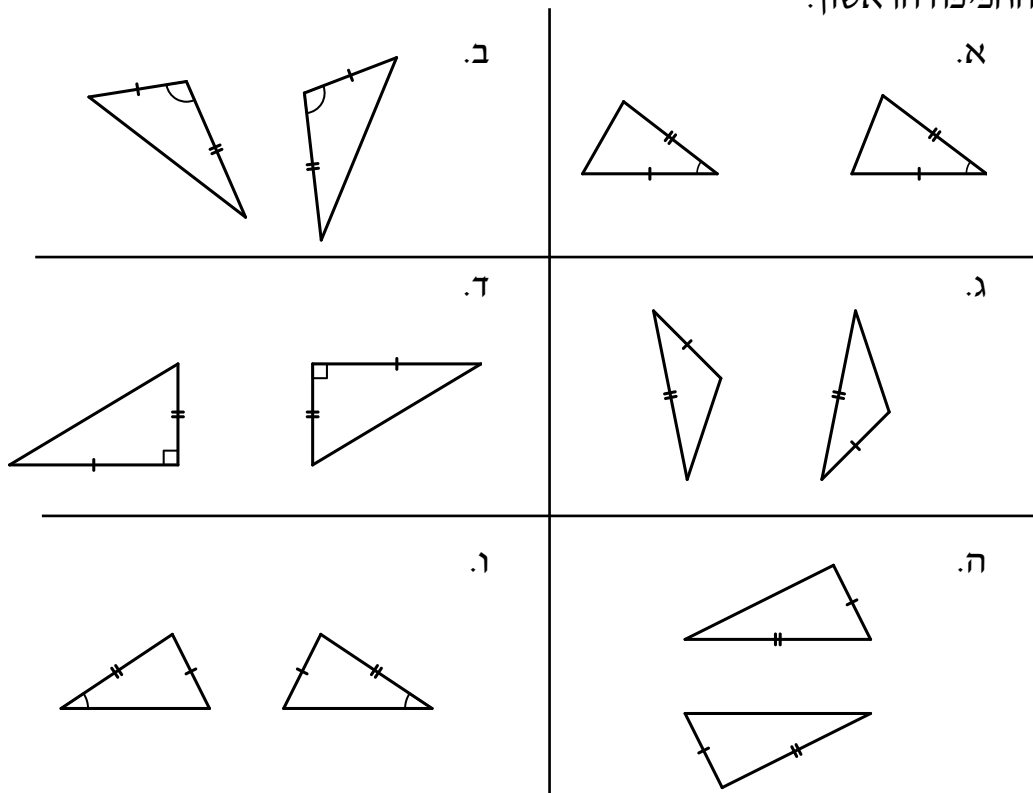
אז: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.



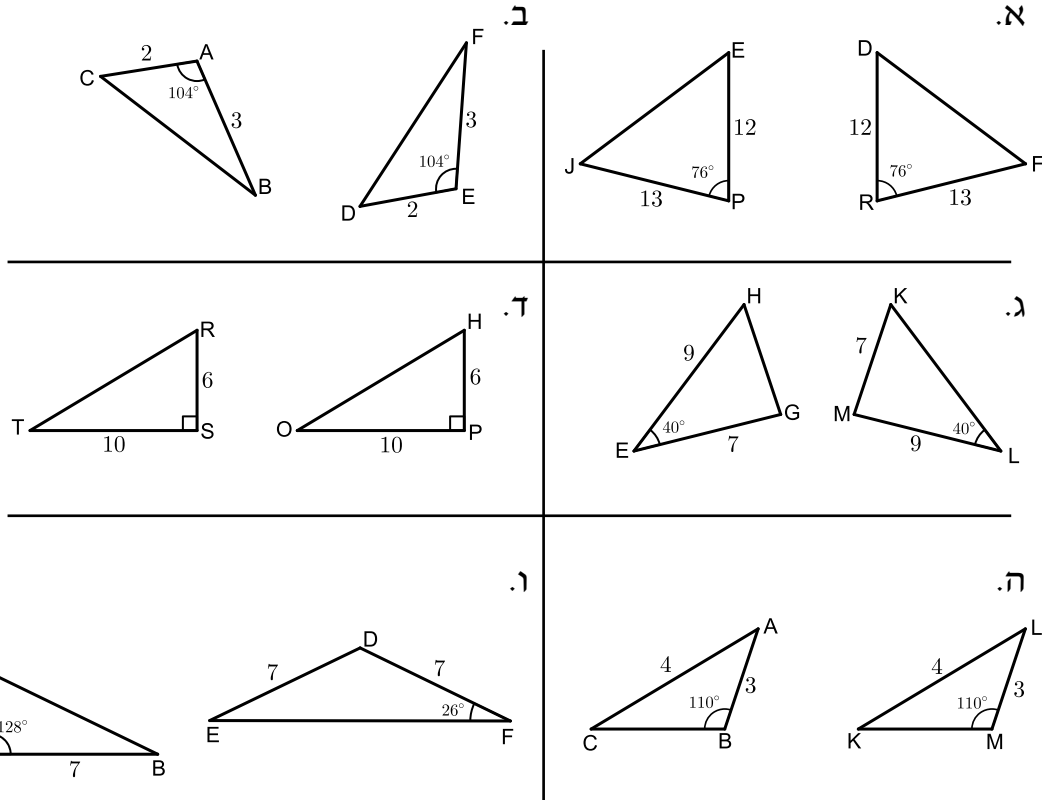
הערה: משפט החפיפה הראשון הוא אקסיומה.

שאלות:

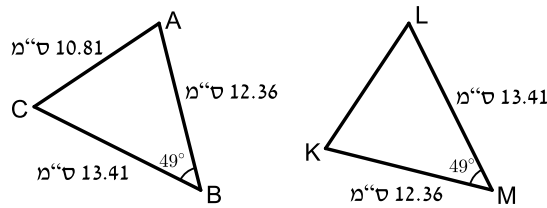
1) לפניכם זוגות של משולשים. הסתמכו על הסימנים של הצלעות השוות ו/או הזוויות השוות המופיעים בהם, וקבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה הראשון.



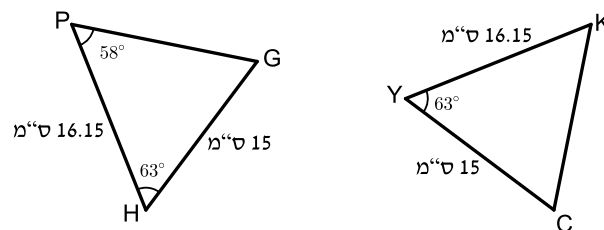
2) על סמך הנתונים שבסרטוטים הבאים, קבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה צ.ז.צ. אם כן, רשמו את החפיפה של המשולשים תוך הקפדה על סדר האותיות של הקודקודים. (אורכי הצלעות נתונים בס"מ).

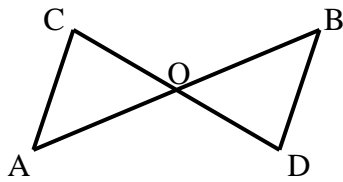


3) לפניכם זוג משולשים. התייחסו לנתונים שבהם וקבעו את אורך הצלע KL. נמקו את תשובתכם.

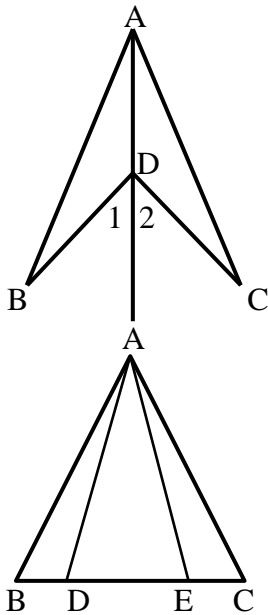


4) לפניכם זוג משולשים. התייחסו לנתונים שבהם וקבעו את גודלה של הזווית C. נמקו את תשובתכם.





- (5) באיור שלפניך הקטעים AB ו-CD חוצים זה את זה בנקודה O.
הוכח: $\triangle ACO \cong \triangle BDO$.



- (6) באיור שלפניך נתון: $BD = CD$.
כמו כן: $\angle D_1 = \angle D_2$.
הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

- (7) בסרטוט שלפניך נתון:
 $\angle B = \angle C$, $BE = CD$.
הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle ACE$.

תשובות סופיות:

- (1) משולשים חופפים לפי צ.ז.צ.: א', ב', ד'. משולשים לא חופפים: ג', ה', ו'.
(2) משולשים חופפים לפי צ.ז.צ.: א', ב', ד', ו'. משולשים לא חופפים: ג', ה'.
(3) $KL = 10.81$ ס"מ.
(4) $\angle C = 59^\circ$.
(5) שאלת הוכחה.
(6) שאלת הוכחה.
(7) שאלת הוכחה.

משפט חפיפה שני:

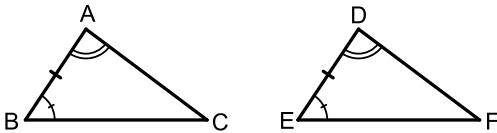
סיכום כללי:

משפט חפיפה שני (זווית, צלע, זווית):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה צלע ושתי הזוויות שלידה אז המשולשים חופפים.
מתמטית:

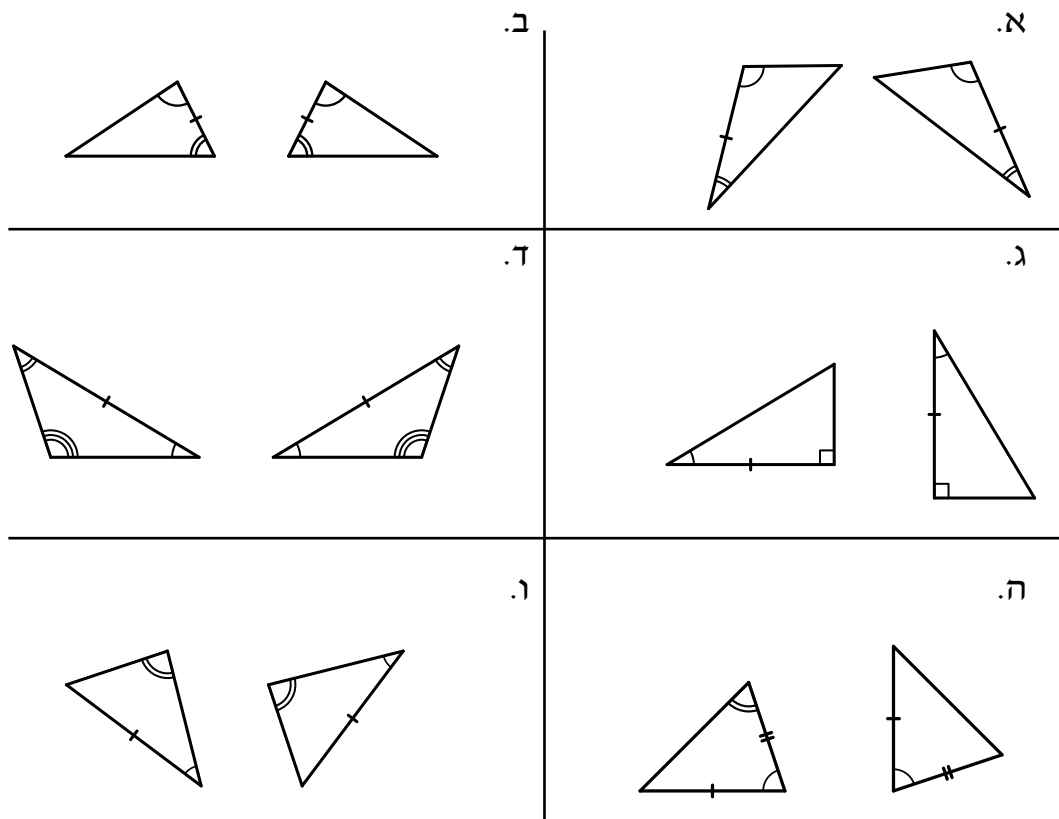
אם: $AB = DE$ ו- $\sphericalangle A = \sphericalangle D$, $\sphericalangle B = \sphericalangle E$

אז: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

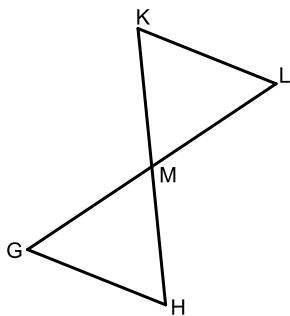
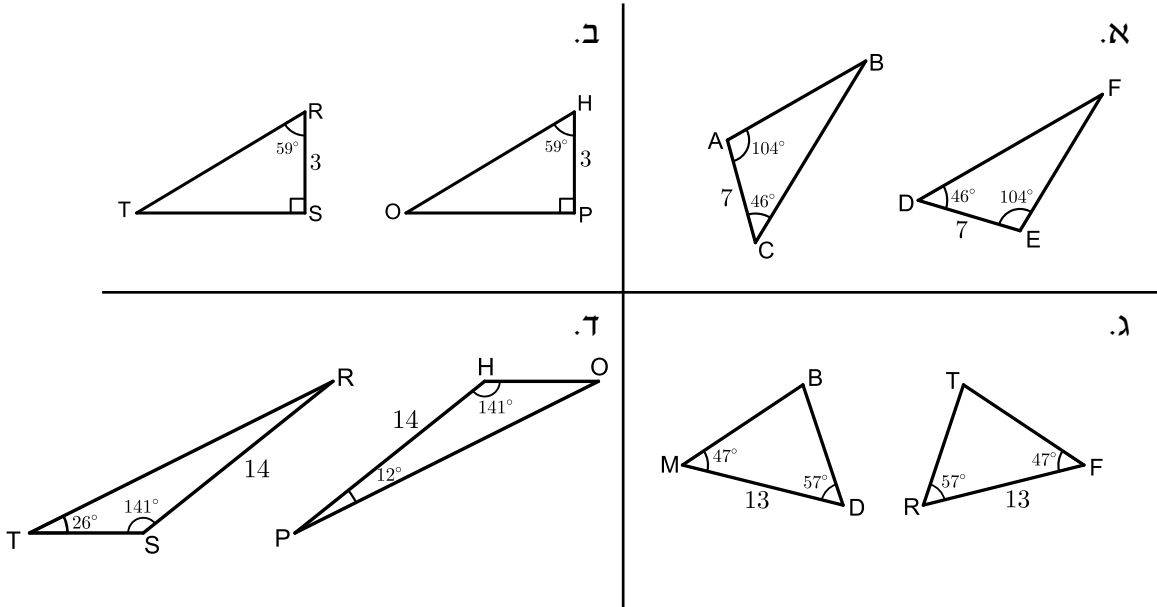


שאלות:

1) לפניכם זוגות של משולשים. הסתמכו על הסימנים של הצלעות השוות ו/או הזוויות השוות המופיעים בהם, וקבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה השני.

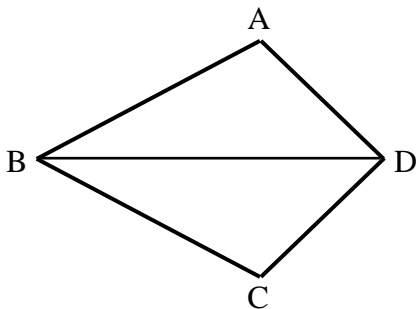


2) על סמך הנתונים שבסרטוטים הבאים, קבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה ז.צ.ז. אם כן, רשמו את החפיפה של המשולשים תוך הקפדה על סדר האותיות של הקודקודים. (אורכי הצלעות נתונים בס"מ).

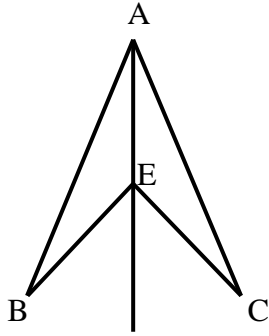


3) שני קטעים KH ו-GL חותכים זה את זה בנקודה M.
 א. מה ניתן לקבוע לגבי הזוויות $\angle KML$ ו- $\angle GMH$? נמקו.
 ב. מצאו כי $GM = ML$.
 האם ניתן לקבוע כי שני המשולשים שבסרטוט חופפים? נמקו.
 ג. בנוסף לנתון שבסעיף הקודם, מדדו ומצאו כי: $\angle MGH = \angle KLM$.
 האם כעת ניתן לקבוע כי שני המשולשים חופפים? נמקו.
 ד. השלימו את המשפטים הבאים:

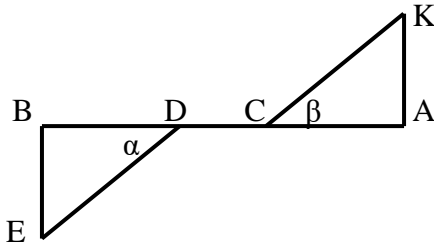
$\angle K =$ _____ מכיוון ש: _____
 $GH =$ _____ מכיוון ש: _____
 $KM =$ _____ מכיוון ש: _____



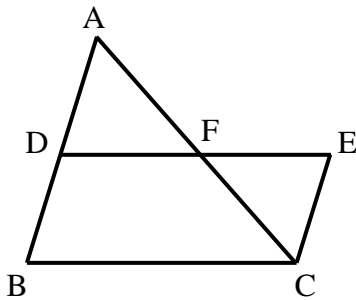
4) במרובע ABCD נתון כי BD חוצה את זוויות B ו-D.
 הוכח: $\triangle ABD \cong \triangle CBD$.



- (5) בסרטוט שלפניך נתון :
 AE חוצה את הזוויות $\sphericalangle BAC$ ו- $\sphericalangle BEC$.
 הוכח : $\triangle ABE \cong \triangle ACE$.



- (6) בציור שלפניך נתון :
 $AC = BD$, $\alpha = \beta$
 $AB \perp BE$, $AB \perp AK$
 הוכח : $\triangle AKC \cong \triangle BED$



- (7) באיור שלפניך נתון :
 הנקודה F היא אמצע הקטע AC.
 מתקיים : $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACE$.
 הקטעים BD ו-CE שווים.
 הוכח את הטענות הבאות :
 א. F היא אמצע הקטע DE.
 ב. D היא אמצע הקטע AB.

תשובות סופיות :

- (1) משולשים חופפים לפי ז.צ.ז. : א', ב', ג', ד', משולשים לא חופפים : ה', ו'.
 הערה : במקרה ה' המשולשים חופפים לפי משפט צ.ז.צ. ולא לפי משפט ז.צ.ז.
- (2) משולשים חופפים לפי ז.צ.ז. : א', ב', ג', משולשים לא חופפים : ד'.
- (3) א. זוויות קודקודיות שוות. ב. לא. ג. כן, לפי ז.צ.ז.
- ד. $\sphericalangle K = \sphericalangle H$ (זמב"ח), $GH = LK$ (צמב"ח), $KM = MH$ (צמב"ח).
- (4) שאלת הוכחה.
- (5) שאלת הוכחה.
- (6) שאלת הוכחה.
- (7) שאלת הוכחה.

משפט חפיפה שלישי:

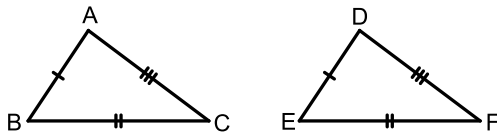
סיכום כללי:

משפט חפיפה שלישי (צלע, צלע, צלע):

אם בשני משולשים שוות בהתאמה שלוש הצלעות אז המשולשים חופפים.
מתמטית:

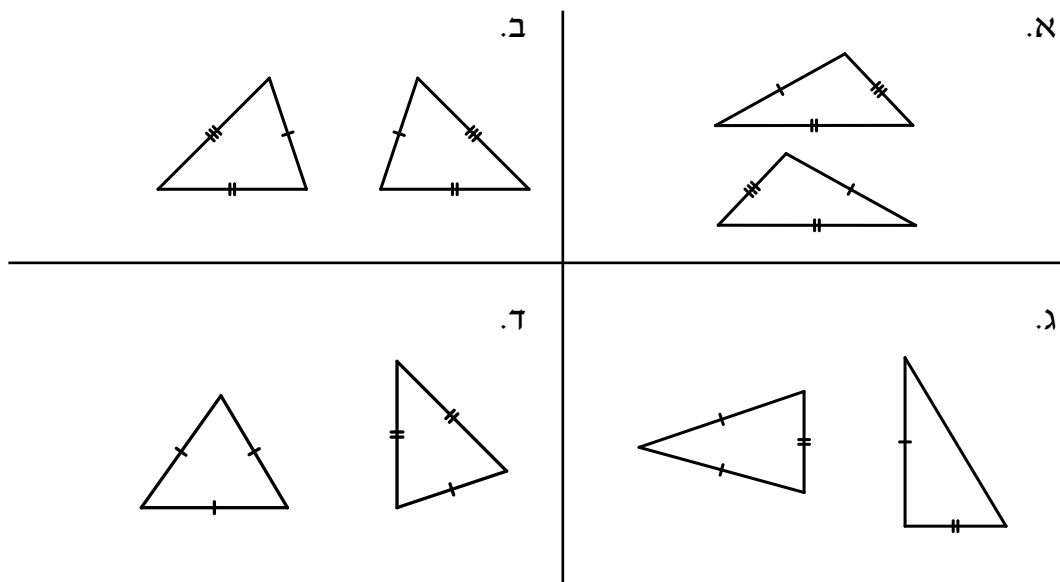
אם: $AC = DF$ ו- $AB = DE$, $BC = EF$

אז: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

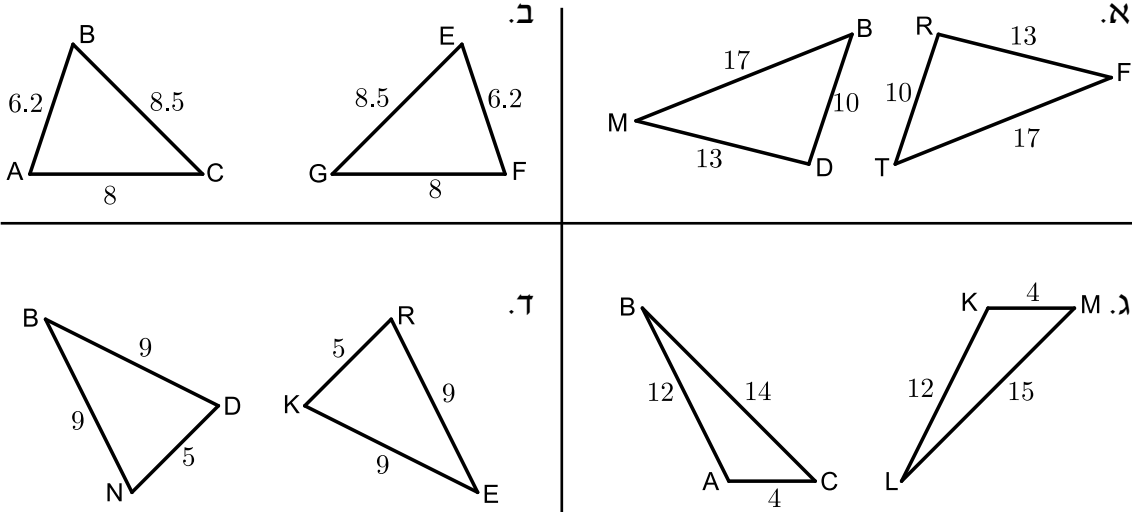


שאלות:

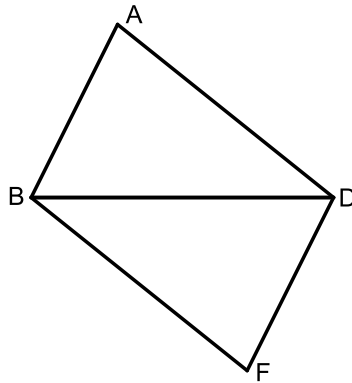
1) לפניכם זוגות של משולשים. הסתמכו על הסימנים של הצלעות השוות המופיעים בהם, וקבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה השלישי.



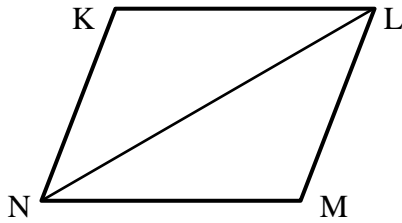
2) על סמך הנתונים שבסרטוטים הבאים, קבעו האם המשולשים חופפים לפי משפט החפיפה צ.צ.צ. אם כן, רשמו את החפיפה של המשולשים תוך הקפדה על סדר האותיות של הקודקודים. (אורכי הצלעות נתונים בס"מ).



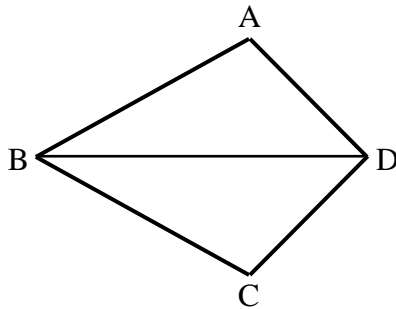
3) לפניכם שני משולשים, $\triangle ABD$ ו- $\triangle BFD$.



- השלימו: הקטע BD משמש כצלע _____ לשני המשולשים $\triangle ABD$ ו- $\triangle BFD$.
- מדדו וקבעו כי $AB = DF$.
- האם ניתן לקבוע כי שני המשולשים הנתונים $\triangle ABD$ ו- $\triangle BFD$ חופפים?
 ג. בנוסף למה שנקבע בסעיף הקודם, כעת נתון גם כי: $AD = BF$.
 האם עכשיו ניתן לקבוע כי שני המשולשים חופפים?
 אם כן, כתבו את החפיפה של המשולשים תוך הקפדה על סדר האותיות של הקודקודים.
- השלימו את המשפטים הבאים:
 $\angle BAD = \angle \dots$ כי הן הזוויות שמול: _____
 $\angle BDA = \angle \dots$ כי הן הזוויות שמול: _____
 $\angle F = \angle \dots$ כי הן הזוויות שמול: _____



- (4) באיור שלפניך נתון :
 $KL = MN$, $KN = LM$
 הוכח : $\triangle KLN \cong \triangle MLN$



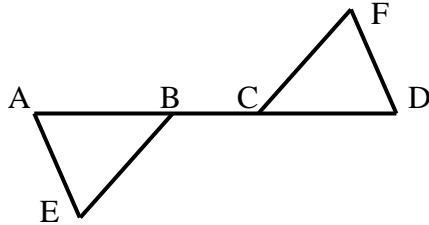
- (5) במרובע ABCD נתון :
 $AB = BC$, $AD = CD$
 הוכח : $\sphericalangle A = \sphericalangle C$

תשובות סופיות:

- (1) משולשים חופפים לפי צ.צ.צ : א', ב' משולשים לא חופפים : ג', ד'.
 (2) משולשים חופפים לפי צ.צ.צ : א', ב', ד' משולשים לא חופפים : ג'.
 (3) א. צלע משותפת ב. לא. ג. כן, לפי צ.צ.צ.
 ד. $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BFD$ (מול : הצלע BD), $\sphericalangle BDA = \sphericalangle FBD$ (מול : $FD = AB$)
 $\sphericalangle F = \sphericalangle A$ (מול : הצלע BD).
 (4) שאלת הוכחה.
 (5) שאלת הוכחה.

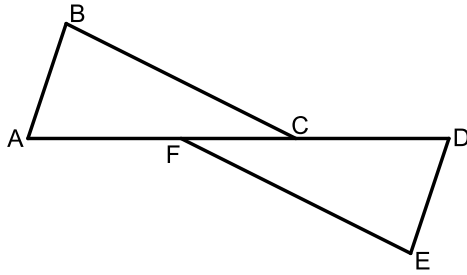
חפיפת משולשים עם חיבור וחיסור קטעים:

שאלות:



- (1) הקטע AD הוא קו ישר.
נתון: $AE = DF$, $AC = BD$.
כמו כן מתקיים: $\sphericalangle A = \sphericalangle D$.
הוכח כי הקטעים BE ו-FC שווים.

- (2) באיור שלפניכם נתונים: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle EDF$, $AF = CD$, $AB = DE$.
הוכיחו:



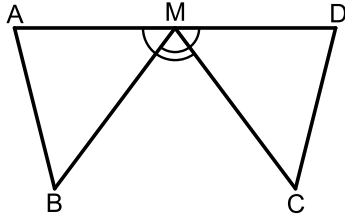
- א. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
ב. $BC = EF$.

תשובות סופיות:

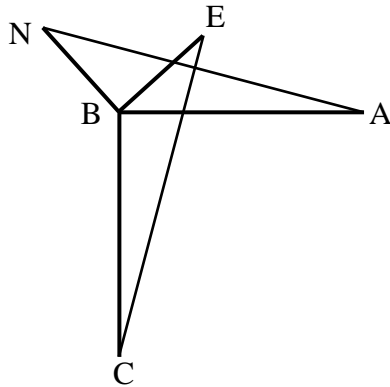
- (1) שאלת הוכחה.
(2) שאלת הוכחה.

חפיפת משולשים עם חיבור וחיסור זוויות:

שאלות:



- (1) הנקודה M היא אמצע הקטע AD.
נתון: $\angle AMC = \angle BMD$, $BM = CM$.
א. הוכיחו: $\triangle ABM \cong \triangle DCM$.
ב. הוכיחו כי: $\angle A = \angle D$, $AB = DC$.



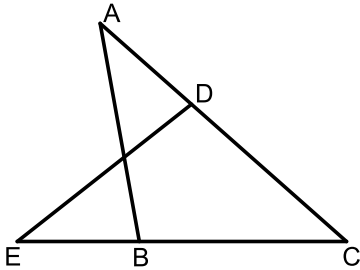
- (2) בציור שלפניך נתון:
 $AB = BC$, $BE = BN$
 $AB \perp BC$, $BE \perp BN$
הוכח: $AN = CE$.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
(2) שאלת הוכחה.

חפיפת משולשים עם כיסוי חלקי:

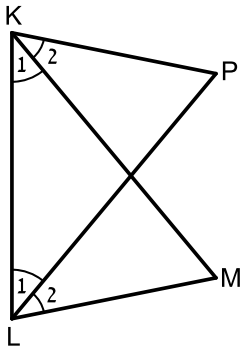
שאלות:



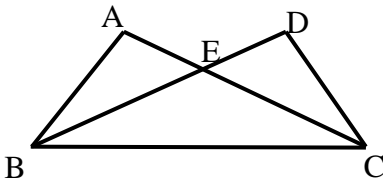
(1) באיור שלפניכם נתון: $AC = EC$, $DC = BC$.
הוכיחו:

א. $\triangle CDE \cong \triangle CBA$.

ב. $\angle ADE = \angle ABE$.



(2) באיור שלפניכם נתון: $\angle K_1 = \angle L_1$, $\angle K_2 = \angle L_2$.
הוכיחו כי: $\triangle KPL \cong \triangle LMK$.



(3) באיור שלפניך נתון:
 $\angle DBC = \angle ACB$, $\angle ABC = \angle DCB$.
הוכח: $AB = CD$.

תשובות סופיות:

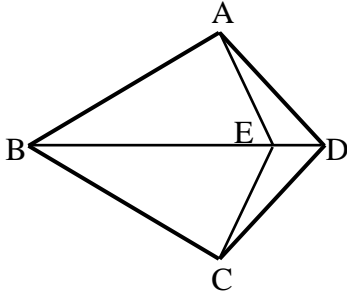
(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.

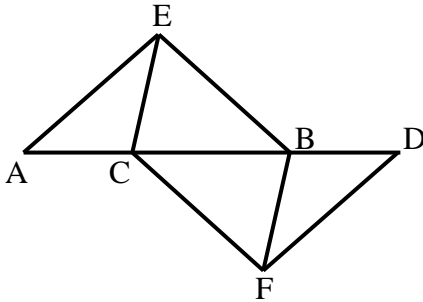
שתי חפיפות:

שאלות:



- (1) בסרטוט שלפניך נתון כי BD הוא קו ישר.
מתקיים: $AD = CD$, $AB = BC$.
הנקודה E נמצאת על BD.
הוכח כי: $AE = CE$.

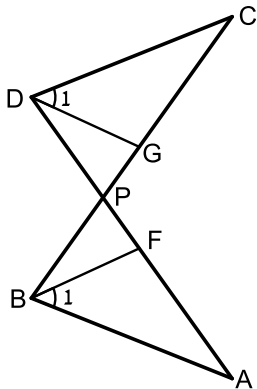
- (2) בציור שלפניך נתון כי AD הוא קו ישר. מתקיים: $\angle AEC = \angle DFB$, $\angle A = \angle D$.



וכן $AE = DF$. הוכח:

א. $CE = BF$

ב. $BE = CF$



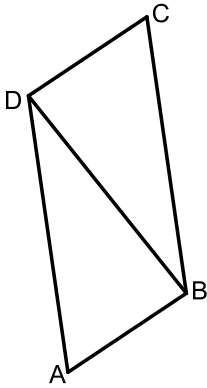
- (3) הקטעים AD ו-BC נחתכים בנקודה P.
הנקודה F נמצאת על AD והנקודה G נמצאת על BC.
נתון: $AP = CP$, $BP = DP$, $\angle B_1 = \angle D_1$.
הוכיחו כי BF ו-DG שווים זה לזה.

תשובות סופיות:

- (1) שאלת הוכחה.
(2) שאלת הוכחה.
(3) שאלת הוכחה.

חפיפת משולשים עם ישרים מקבילים:

שאלות:

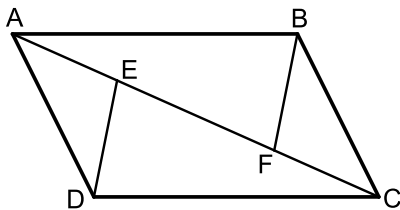


(1) באיור שלפניכם נתון: $AD = BC$, $AD \parallel BC$.
הוכיחו:

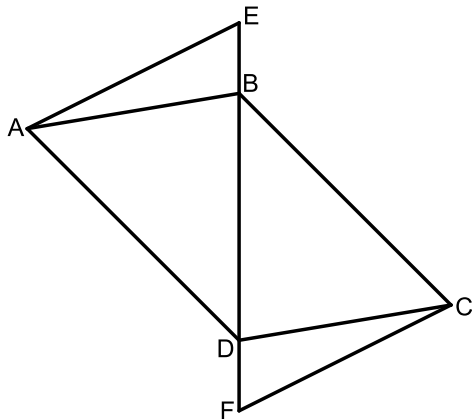
א. $\triangle ABD \cong \triangle CDB$.

ב. $AB = CD$.

ג. $AB \parallel CD$.



(2) באיור שלפניכם הנקודות E ו-F נמצאות על AC.
נתון כי: $AF = CE$, $AD = BC$, $AB = CD$.
הוכיחו כי $DE \parallel BF$.



(3) באיור שלפניכם הנקודות B ו-D נמצאות על הקטע EF.
כך שמתקיים: $BE = DF$.
בנוסף נתון: $AD = BC$, $AB = CD$.
הוכיחו כי AE ו-CF מקבילים זה לזה.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) שאלת הוכחה.

(3) שאלת הוכחה.